HYPOZYKLOIDEN EINES DREIECKS

1. Vorbemerkung

Die hier angesprochenen Hypozykloiden eines Dreiecks sind an sich Ortslinien eines merkwürdigen Viereckpunktes. Geht man von einem Dreieck ABC aus, so erhält man ein sehr spezielles Viereck, wenn man das Dreieck durch seinen Höhenschnittpunkt *H* zu einem Viereck ergänzt. Damit dieses Viereck nicht entartet, sei generell vorausgesetzt, dass das Dreieck nicht entartet und nicht rechtwinklig ist. Jeder Eckpunkt des Vierecks *ABCH* ist dann Höhenschnittpunkt des Dreiecks aus den übrigen drei Ecken. Vierecke mit dieser Eigenschaft heißen bei COXETER Höhenschnittpunktvierecke [1] oder bei STÄRK orthozentrische Vierecke [2]. Der Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks *ABC* durch Seitenmitten, Höhenfußpunkte und obere Höhenabschnittsmitten ist gleichzeitig der Neun-Punkte-Kreis der übrigen Teildreiecke *ABH, BCH, CAH.* Der Mittelpunkt dieses Neun-Punkte-Kreises ist der Schwerpunkt *Z* des orthozentrischen Vierecks *ABCH*.

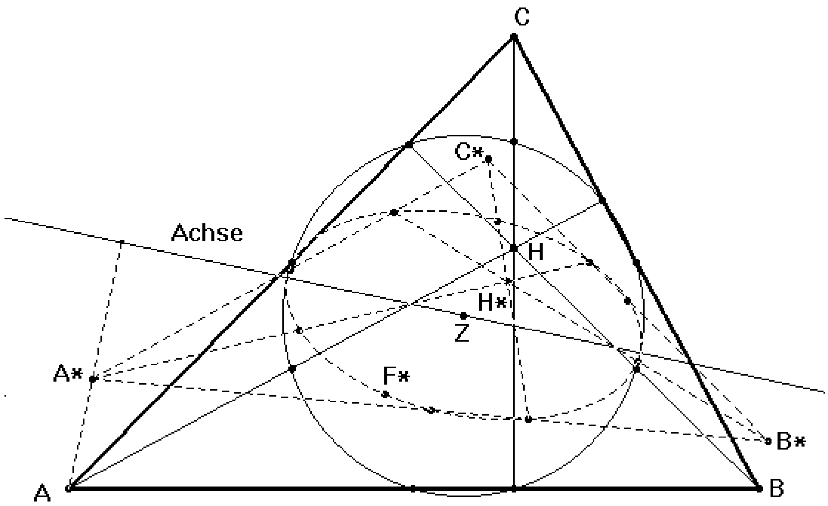

Abb. 1. Affines Bild des orthozentrischen Vierecks *ABCH*

Betrachtet man nun zu dem Viereck *ABCH* die affinen Bilder *A*B*C*H** bzgl. Achsenaffinitäten, deren Achsen durch den Punkt *Z* gehen, so sind die Bildvierecke i.a. nicht mehr orthozentrisch. Der Neun-Punkte-Kreis wird zu einem Neun-Punkte-Kegelschnitt, der hier nicht weiter untersucht sei [1]. Die vier Neun-Punkte-Kreise der Teildreiecke des Vierecks *A*B*C*H** fallen jetzt auseinander, schneiden sich aber in einem Punkt, der ebenfalls auf dem Neun-Punkte-Kegelschnitt liegt. Dieser Punkt – der Schnittpunkt der Neun-Punkte-Kreise der Teildreiecke eines Vierecks – ist der eingangs angesprochene merkwürdige Viereckpunkt, dessen Ortslinien die Hypozykloiden eines Dreiecks liefern; er sei hier als Feuerbachpunkt eines Vierecks angesprochen [3]. Bei STÄRK heißt dieser Punkt Gleichseitigeshyperbelzentrum eines Vierecks, da er für jedes nichtentartete und nichtorthozentrische Viereck das eindeutig bestimmte Zentrum einer gleichseitigen Umhyperbel des Vierecks ist [2].

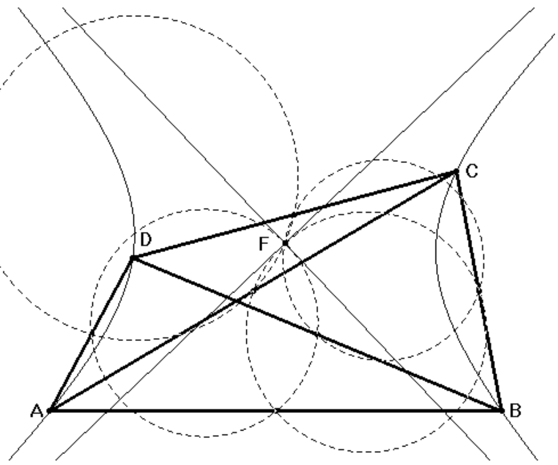

Abb. 2. Der Feuerbachpunkt oder das Gleichseitigehyperbelzentrum eines Vierecks

Hat das Viereck genau ein orthogonales Gegenseitenpaar, so entartet die Hyperbel zu einem orthogonalen Geradenpaar. Für ein orthozentrisches Viereck ist der Feuerbachpunkt nicht eindeutig bestimmt, jeder Punkt der zusammenfallenden Feuerbachkreise kann als Gleichseitigeshyperbelzentrum gewählt werden.

Zusammenfassend kann der folgende Satz ausgesprochen werden:

> **Satz: Zu einem nichtentarteten, nichtrechtwinkligen Dreieck *ABC* wird das durch den Höhenschnittpunkt *H* erweiterte orthozentrische Viereck *ABCH* betrachtet mit allen affinen Bildern bezüglich Achsenaffinitäten, deren Achsen durch das Neun-Punkte-Zentrum des Dreiecks *ABC* verlaufen und den gleichen Affinitätsfaktor haben. Die Feuerbachpunkte dieser Bildvierecke liegen auf einer Hypozykloiden. Diese Hypozykloiden berühren den Feuerbachkreis des Dreiecks *ABC* in drei festen Punkten, die jeweils den Bogen zwischen Seitenmitte und Höhenfußpunkt dritteln. Der Affinitätsfaktor bestimmt die Form der Hypozykloiden.**

Diese geometrischen Zusammenhänge wurden beim PC-orientierten Experimentieren zum Feuerbachpunkt eines Vierecks mit dem Geometrie-Programm CABRI entdeckt; mit dem auch die Zeichnungen erstellt wurden. Einige Beispiele von Hypozykloiden eines Dreiecks seien zur Veranschaulichung vorausgeschickt.

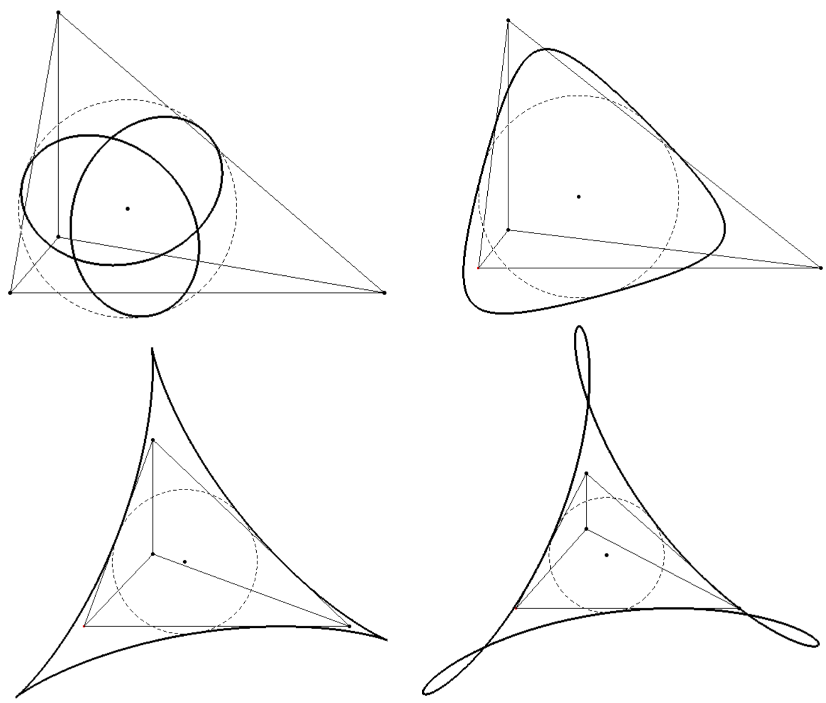

Abb. 3. Hypozykloiden eines Dreiecks zu den Affinitätsfaktoren
0,5; – 1,5; – 3; – 4

2. Das benutzte Koordinatensystem

Für eine analytische Behandlung ist ein angepasstes Koordinatensystem von großer Bedeutung. Hier sei auf das von STÄRK [2] benutzte Koordinatensystem zurückgegriffen, das schon oben bei der gleichseitigen Umhyperbel eines Vierecks

anklingt. Durch die vier Punkte eines nicht entarteten Vierecks ohne orthogonales Gegenseitenpaar lässt sich eindeutig eine gleichseitige Hyperbel legen, die bei geeigneter Wahl der Längeneinheit die Gleichung $x \cdot y = 1$ hat. Daher können die Ecken wie folgt analytisch erfasst werden:

$$A(a;\frac{1}{a}),\quad B(b;\frac{1}{b}),\quad C(c;\frac{1}{c}),\quad D(d;\frac{1}{d}).$$

Hat das Viereck genau ein orthogonales Gegenseitenpaar, so entartet die Hyperbel zu einem orthogonalen Geradenpaar. Folgende Darstellung ist aber noch möglich:

$$A(0;\frac{1}{a}),\quad B(0;\frac{1}{b}),\quad C(0;\frac{1}{c}),\quad D(0;\frac{1}{d}).$$

Bei dieser Wahl eines Koordinatensystems liegt der Feuerbachpunkt als das Gleichseitigehyperbelzentrum des Vierecks im Ursprung des Koordinatensystems – ein großer Vorteil für die weiteren Betrachtungen.

Für ein orthozentrisches Viereck ist die gleichseitige Hyperbel nicht eindeutig bestimmt, und jeder Punkt des gemeinsamen Neun-Punkte-Kreises kann als Zentrum gewählt werden. Wählt man einen der Schnittpunkte der orthogonalen Gegenseiten des orthozentrischen Vierecks als Zentrum, so entartet die Hyperbel im obigen Sinne.

Zurück zu einem nichtentarteten Dreieck ABC, das nicht rechtwinklig ist. Jeder Punkt O auf dem Neun-Punkte-Kreis, der nicht Höhenfußpunkt ist, kann als Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems gewählt werden, so dass die Eckpunkte des Dreiecks bei geeigneter Einheitenwahl folgende Darstellung haben:

$$A(a;\frac{1}{a}),\quad B(b;\frac{1}{b}),\quad C(c;\frac{1}{c}).$$

Die elementaren analytischen Berechnungen für die im Folgenden angesprochenen Punkte seien hier übergangen und nur im Ergebnis mitgeteilt; sie finden sich in [3] näher ausgeführt .

Höhenschnittpunkt $\quad H(-\frac{1}{abc}\,;-abc)$;

Mittelpunkt des Neun-Punkte-Kreises als Schwerpunkt des orthozentrischen Vierecks $ABCH$:

$$Z(\frac{abc(a+b+c)-1}{4abc}\,;\frac{ab+bc+ca-a^2b^2c^2}{4abc})\,;$$

Radius $|r|$ des Feuerbachkreises mit

$$r=\frac{1}{4abc}\sqrt{(1+a^2b^2)(1+b^2c^2)(1+c^2a^2)}\,;$$

Seitenmitte z.B. $\quad M_c(\frac{a+b}{2}\,;\frac{a+b}{2ab})$;

Höhenfußpunkt z.B.

$$H_c(\frac{-ab+bc+ca+a^2b^2c^2}{c(1+a^2b^2)}\,;\frac{1+abc(a+b+c)}{c(1+a^2b^2)}\,.$$

Für die weitere Behandlung wird ein spezielles Koordinatensystem so ausgewählt, dass die y-Achse durch den Mittelpunkt Z des Neun-Punkte-Kreises geht. Dies ist genau dann der Fall, wenn $abc(a+b+c)=1$ ist. Der Radius des Feuerbachkreises liefert die Ordinate des Mittelpunktes, jetzt vereinfacht darstellbar:

$$Z(0\,;r)\ \text{mit}\ r=\frac{(a+b)(1+a^2b^2)}{4ab}\,.$$

Entsprechend vereinfachen sich die Koordinaten von

$$H_c(\frac{(a+b)(a+b-2abr)}{2abr}\,;\frac{(a+b)^2}{2r})\,.$$

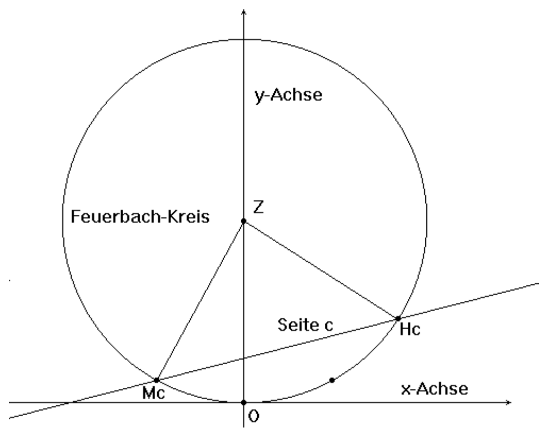

Abb. 4. Ausgewähltes Koordinatensystem

Für den Winkel $\alpha = \angle M_c ZO$ gilt

$$\sin\alpha = \frac{-x_{Mc}}{r} = -\frac{a+b}{2r}$$

und $$\cos\alpha = \frac{r - y_{Mc}}{r} = \frac{2abr - (a+b)}{2abr}$$

und damit

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{(a+b)(a+b-2abr)}{2abr^2}.$$

Für den Winkel $\beta = \angle OZH_c$ gilt dann

$$\sin\beta = \frac{x_{Hc}}{r} = \sin 2\alpha .$$

Damit ist gezeigt: Geht die y-Achse des gewählten Koordinatensystems durch den Mittelpunkt des Neun-Punkte-Kreises, so drittelt der Koordinatenursprung O auf dem Neun-Punkte-Kreis den Bogen zwischen Seitenmitte und Höhenfußpunkt einer Dreiecksseite. Diese drei bogendrittelnden Punkte auf dem Neun-Punkte-Kreis bilden ein gleichseitiges Dreieck [1].

Betrachtet man vorerst den Sonderfall einer Achsenaffinität mit dem Faktor *k*, deren Achse mit der y-Achse des ausgezeichneten Koordinatensystems zusammenfällt, so hat das Bildviereck von *ABCH* die Darstellung

$$A^*(ka\,;\frac{1}{a}),\quad B^*(kb\,;\frac{1}{b}),\quad C^*(kc\,;\frac{1}{c}),\quad H^*(-\frac{k}{abc}\,;-abc)$$

Diese Punkte liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel. Der Feuerbachpunkt dieses für $k \neq -1, 0, +1$ nicht mehr orthozentrischen Vierecks ist der Ursprung des Koordinatensystems, der nach den obigen Ausführungen den Bogen zwischen Seitenmitte und Höhenfußpunkt drittelt. Dieses Ergebnis ist unabhängig vom Affinitätsfaktor *k*, d.h. diese bogendrittelnden Punkte liegen auf jeder Ortskurve des Feuerbachpunktes des Vierecks *A*B*C*H**.

Schneidet die Affinitätsachse die y-Achse des ausgezeichneten Koordinatensystems unter einem Winkel ψ, so lässt sich ein x′-y′-Koordinatensystem finden, dessen y′-Achse parallel zur Affinitätsachse verläuft, dessen Ursprung *O′* auf dem Neun-Punkte-Kreis liegt und in dem die Punkte *A, B, C, H* ein konstantes Koordinatenprodukt *p* haben.

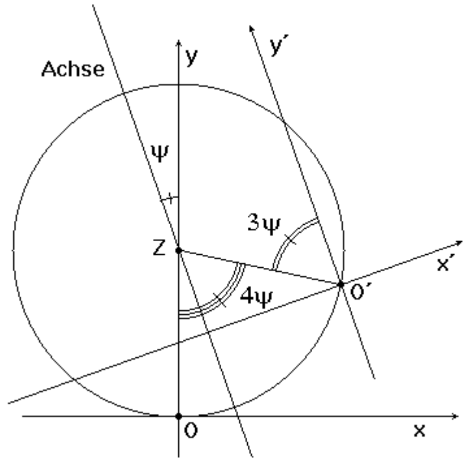

Abb. 5. Variation des Koordinatensystems

Dies ist der Fall, wenn der Winkel $\angle OZO' = 4\psi$ beträgt. Dreht man also den Ursprung des Koordinatensystems auf dem Neun-Punkte-Kreis um einen bestimmten Winkel und die y-Achse um den vierten Teil dieses Winkels, so erhält man wieder ein Koordinatensystem, in dem die Ecken des Dreiecks ein konstantes Koordinatenprodukt haben. Zur Begründung:
Mit $O'(r\sin 4\psi\,;\, r - r\cos 4\psi)$ ergibt sich die Koordinatentransformation:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - r\sin 4\psi \\ y - r + r\cos 4\psi \end{pmatrix},$$

d.h. $x' = x\cos\psi + (y - r)\sin\psi - r\sin 3\psi$

und $y' = -x\sin\psi + (y - r)\cos\psi + r\cos 3\psi$.

Das Koordinatenprodukt

$$x'y' = xy\cos 2\psi + \frac{1}{2}\left[(y - r)(y - 3r) - x^2\right]\sin 2\psi - \frac{r^2}{2}\sin 6\psi$$

liefert für die Punkte *A, B, C* unter Berücksichtigung des Spezialfalls $abc(a + b + c) = 1$ übereinstimmend

$$p = \cos 2\psi - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)\sin 2\psi + 2r^2\sin^3 2\psi$$

Damit liegen *A, B, C* auf einer gleichseitigen Hyperbel mit der Gleichung $x'y' = p$. Mit der skizzierten Koordinatentransformation lässt sich also das Koordinatensystem der jeweiligen Richtung der Affinitätsachse anpassen.

3. Gleichung der Hypozykloiden

Betrachtet man zu konstantem Faktor $k \neq -1{,}0{,}+1$ eine Achsenaffinität, deren Achse mit der y-Achse des eingangs ausgezeichneten x-y-Systems den Winkel ψ einschließt, so hat man in dem x´-y´-System eine zur Affinitätsachse parallele y´-Achse. In dem gestrichenen System lassen sich die Koordinaten der Bildpunkte – z.B. von A* - leicht bestimmen:

$$x'_{A*} = kx'_A - (k-1)x'_Z \text{ und } y'_{A*} = y'_A \ .$$

Verschiebt man das gestrichene System um $-(k-1)x'_Z$ in x´-Richtung:

$$x'' = x' + (k-1)x'_Z \quad \text{und} \quad y'' = y' \ ,$$

so ergibt das Koordinatenprodukt des Punktes $A*$

$$x''_{A*}\, y''_{A*} = kx'_A\, y'_A = kp \ ,$$

d.h. die Bildpunkte $A*$, $B*$, $C*$, $H*$ haben alle das Koordinatenprodukt kp und liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die x´´- und die y´´-Achse sind. Damit liegt der Feuerbachpunkt des nichtorthozentrischen Vierecks $A*B*C*H*$ im Ursprung O'' des x´´-y´´-Systems.

In diesem System hat Z die Koordinaten

$$x''_Z = kx'_Z = -kr\sin 3\psi \quad \text{und} \quad y''_Z = y'_Z = r\cos 3\psi \ .$$

Verschiebt man nun das zweigestrichene Koordinatensystem nach Z und dreht das System in seine ursprüngliche Richtung zurück:

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' + kr\sin 3\psi \\ y'' - r\cos 3\psi \end{pmatrix},$$

so erhält man speziell für den Ursprung des zweigestrichenen Systems:

$$\begin{aligned} x'''_{O''} &= kr\cos\psi\sin 3\psi + r\sin\psi\cos 3\psi \\ &= \frac{r}{2}(k-1)\sin 2\psi + \frac{r}{2}(k+1)\cos 4\psi \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} y'''_{O''} &= kr\sin\psi\sin 3\psi - r\cos\psi\cos 3\psi \\ &= \frac{r}{2}(k-1)\cos 2\psi - \frac{r}{2}(k+1)\cos 4\psi \ . \end{aligned}$$

Setzt man abschließend

$$u = -y''' \ , \ v = x''' \text{ und } \varphi = -2\psi \text{ für k < 1}$$
$$\text{bzw. } \varphi = 180° - 2\psi \text{ für k > 1,}$$

so erhält man gängige Parameterdarstellungen von Hypozykloiden:

$$u = \frac{r}{2}|k-1|\cos\varphi + \frac{r}{2}(k+1)\cos 2\varphi$$
$$= (R-\rho)\cos\varphi + d\cos\frac{R-\rho}{\rho}\varphi \ ,$$
$$v = \frac{r}{2}|k-1|\sin\varphi - \frac{r}{2}(k+1)\sin 2\varphi$$
$$= (R-\rho)\sin\varphi - d\sin\frac{R-\rho}{\rho}\varphi \, .$$

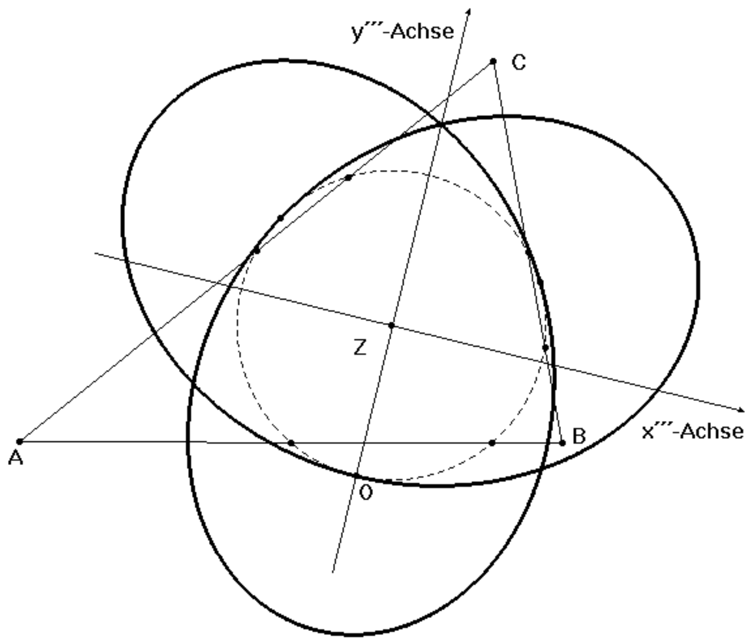

Abb. 6. Hypozykloide eines Dreiecks zum Affinitätsfaktor 2

Der Radius des Rastkreises $R = \frac{3}{4} r\,|k-1|$ ist dreimal so groß wie der Radius ρ des erzeugenden Rollkreises, und die Verkürzung bzw. Verlängerung ist durch $d = \frac{1}{2} r(k+1)$ unter Beachtung des Vorzeichens bestimmt. Für $k = -\frac{1}{3}$ und $k = -3$ erhält man gemeine Hypozykloiden. Für $-3 < k < -\frac{1}{3}$ handelt es sich um verkürzte, sonst um verlängerte Hypozykloiden.

Abschließend sei ergänzt, dass auch ein anderer merkwürdiger Punkt des Vierecks Hypozykloiden eines Dreiecks liefert. Dieser von Stärk [2] ausführlich behandelte und von ihm als Tangentialpunkt eines Vierecks angesprochene Punkt ist dadurch festgelegt, dass man von ihm jede Seite A_iA_j des Vierecks unter der Summe der Schnittwinkel $\angle(A_iA_k, A_kA_j)$ und $\angle(A_iA_l, A_lA_j)$ sieht. Die Hypozykloiden dieses Tangentialpunktes haben die Parameterdarstellung:

$$u = \frac{(k+1)^2}{2\,|k-1|}\cos\varphi + \frac{(k-1)^2}{2(k+1)}\cos 2\varphi \ ,$$

$$v = \frac{(k+1)^2}{2\,|k-1|}\sin\varphi - \frac{(k-1)^2}{2(k+1)}\sin 2\varphi \ .$$

Dabei ändert sich gegenüber den Hypozykloiden des Feuerbach-Punktes der Radius des Rastkreises um den Faktor $(\frac{k+1}{k-1})^2$ und die Verkürzung bzw. Verlängerung d um den Kehrwert dieses Faktors.

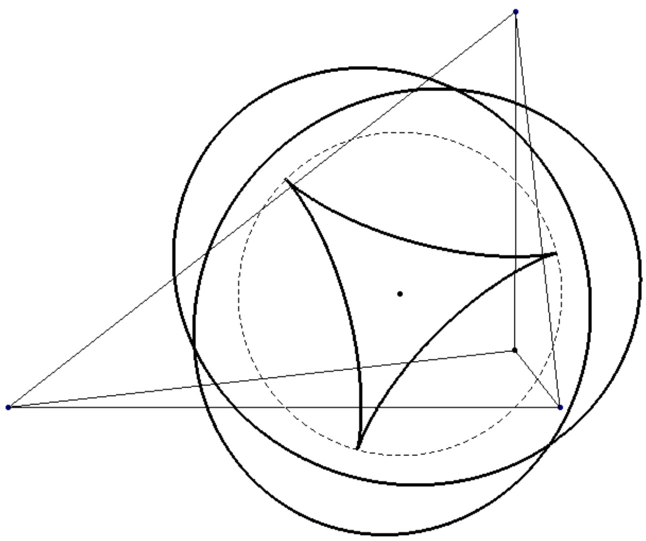

Abb.7. Hypozykloiden des Feuerbach-Punktes (innen) und des Tangentialpunktes (außen) zum Affinitätsfaktor $-\frac{1}{3}$

Literatur:

[1] H.S.M. COXETER: Unvergängliche Geometrie. – Stuttgart: Birkhäuser, 1981.

[2] R.STÄRK und D.BAUMGARTNER: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. – PM 1/44. Jg 2002, S.19.

[3] E.SCHMIDT: Eulergerade eines Vierecks. – PM ...

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckart_schmidt.bei.t-online.de
eckart_schmidt@t-online.de